MATHEMATICS

EIN EINHEITLICHES VERFAHREN ZUR DEFINITION VON ABSOLUT- UND BEDINGT-KONVERGENTEN INTEGRALEN. VII

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of May 28, 1966)

AEQUIVALENZ VON INTEGRALDEFINITIONEN IN R_1.

Bei Untersuchungen auf dem Gebiete der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen führte JAROSLAV KURZWEIL [110]) generalisierte Perron-Integrale ein, daneben eine aequivalente Integraldefinition mittels Riemann-Summen, welche in analoger Weise wie die von RALPH HENSTOCK [111]) in seinem Buche: *Theory of integration* 1963 und in Proc. London Math. Soc. (3) **11** (1961), S. 402–418 gebildet sind. Das Verfahren, welches zum Beweise der genannten Aequivalenz führte, läßt sich erstens erweitern zu einem Beweise der Gleichheit des oberen [unteren] allgemeinen Riemann-Integrals einer beschränkten Funktion f in bezug auf T über i_0 [definiert in Teil II, § 4 [112]) dieser Arbeit] und des oberen [unteren] Perron-Stieltjesschen Integrals von f in bezug auf T über i_0 ($\equiv$ der unteren [oberen] Grenze der in i_0 zu f adjungierten T-Majoranten [T-Minoranten] [aus Teil III, § 13, Def. F und G [113])]). Zweitens führt das Verfahren zur *Aequivalenz der Definitionen der allgemeinen Riemann-Integrale-, der PS-Integrale- und der speziellen DS-Integrale einer endlichen Funktion f in bezug auf T [in bezug auf Φ]* [114]) *über* i_0 (*allgemein über die Mengen des Körpers K*). Als Spezialfall erhält man *das Zusammenfallen der Klasse der Mengen mit Maß μ_T [μ_Φ] und der Klasse von Mengen mit dem gewöhnlichen LS-Maß $m_T[m_\Phi]$, wobei dann $\mu_T \equiv m_T[\mu_\Phi \equiv m_\Phi]$.* [115])

§ 47. Neben den in III, § 13 [116]) gegebenen Definitionen F, G und H von in i_0 zu einer Punktfunktion f adjungierten T-Majoranten $\{\Psi_o\}$ bzw.

110) Siehe KURZWEIL, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czech. Math. J. 7 (82) (1957), S. 418–446, insbes. S. 422–428.

111) Herr HENSTOCK machte mich, in dankenswerter Weise, auf die Arbeit von KURZWEIL aufmerksam.

112) Siehe diese Proceedings, Series **A, 68** (1965), S. 14.

113) Siehe loc. cit. 112), S. 167.

114) Gemäß Def. D^{ter} (III, § 16) bzw. Def. H^* (III, § 13^{bis}) bzw. Def. J_1 oder J_2 (III, § 14) (in diesen Proc. loc. cit. 112)).

115) Dies liefert eine (verneinende) Antwort auf die letzte Frage in II, § 8^{bis} [loc. cit. 112), S. 29], und zeigt daß in den Theoremen 18^b, 18^c in II^{bis}, § 12 [loc. cit. 112), S. 38, 39] μ_T, μ_Φ durch m_T bzw. m_Φ ersetzt werden darf.

116) Siehe loc. cit. 112), S. 165–167.

T-Minoranten $\{\Psi_u\}$ bzw. von PS-Integralen von f in bezug auf T [117]) gibt es, bei f in i_0 endlichwertig, in analoger Weise miteinander korrespondierende Definitionen F^0, G^0, H^0, von denen es genügen wird die Definition F^0 vollständig wiederzugeben.

Definition F^0. In $i_0 \equiv i_0(a, b)$ ist eine für die Teilmengen $\in K$ endliche, beschränkt additive Mengenfunktion $\Psi_o{}^0$ *eine zu der in* i_0 *endlichwertigen Punktfunktion* f *adjungierte* T^0*-Majorante*, wenn: 1. für jeden Punkt $x \in i_0$ mit $T[\{x\}]=0$ auch $\Psi_o{}^0[\{x\}]=0$ ist; 2. $\Psi_o{}^0$ in jedem Punkt $x \in \bar{i}_0$ stetig ist, was heißen soll: aus $a \leqq p < q \leqq b$ folgt immer

$$\lim_{p \to q} \Psi_o{}^0[(p, q)] = \lim_{p \to q} \Psi_o{}^0[(p, q)] = 0;$$

3. für eine mit $\Psi_o{}^0$ korrespondierende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ (siehe I, § 1, Def.), bei $x \in i_0$, $x \in u \subseteqq i(x) \cdot i_0$, mit $i(x) \in \mathfrak{A}[i_0]$, immer

$$\Psi_o{}^0[u] \geqq f(x) \cdot T[u]$$

ist; dabei sei außerdem bei $T[u]=0$ auch $\Psi_o{}^0[u]=0$.

Wegen $F^0 \subseteqq F$, $G^0 \subseteqq G$ und $\Psi_o - \Psi_u$ nicht-negativ für die Mengen von K in i_0 [113]) folgt bei einer in i_0 endlichwertigen Funktion f aus der Existenz einer T^0-Majorante $\Psi_o{}^0$ zusammen mit einer T^0-Minorante $\Psi_u{}^0$, daß auch $\Psi_o{}^0 - \Psi_u{}^0$ nicht-negativ für die Mengen von K in i_0 ist. Dies rechtfertigt die zugehörige Integraldefinition H^0.

Satz. Bei in i_0 endlichwertiger Funktion führen die Definitionen H^0 und H genau ebenso weit.

Beweis. Der Satz folgt einerseits aus $F^0 \subseteqq F$, $G^0 \subseteqq G$, andererseits daraus daß, bei $\varepsilon > 0$, aus $\Psi_o \in F$, [118]) $\Psi_u \in G$ [118]) folgt $(\Psi_o + \varepsilon \cdot T) \in F^0$, $(\Psi_u - \varepsilon \cdot T) \in G^0$.

Dadurch rechtfertigt sich ebenfalls die

Definition: Hat eine in i_0 endliche Funktion f daselbst sowohl Majoranten wie Minoranten in bezug auf T, so lassen sich die oberen und unteren Perron-Stieltjesschen Integrale von f in bezug auf T über i_0 definieren durch:

$\overline{\int}_{i_0}(PS)\ f\ dT =$ untere Grenze aller Werte $\Psi_o[i_0] \equiv$ untere Grenze aller $\Psi_o{}^0[i_0]$,

und

$\underline{\int}_{i_0}(PS)\ f\ dT =$ obere Grenze aller $\Psi_u[i_0] \equiv$ obere Grenze aller $\Psi_u{}^0[i_0]$.

Dabei ist dann

$$\overline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT.$$

---

117) Bekanntlich ändert sich, bei f endlichwertig in i_0, der Umfang der Definition H nicht, falls man die in den Definitionen F, G auftretenden, abzählbaren Ausnahmemengen als leer voraussetzt.

118) F und G eingeschränkt wie in Fußn. 117 angegeben.

Hilfssatz A. Jede in $i_0 \equiv i_0(a, b)$ beschränkte Funktion f hat ein oberes und ein unteres allgemeines Riemann-Integral in bezug auf T über i_0, $\overline{\int}_{i_0} f\, dT$ bzw. $\underline{\int}_{i_0} f\, dT$ (II, § 4, Def.); bei $\varepsilon > 0$ gibt es eine in i_0 zu f adjungierte T^0-Majorante $\Psi_o{}^0$ und eine in i_0 zu f adjungierte T^0-Minorante $\Psi_u{}^0$, mit

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^0[i_0] \geqq \Psi_u{}^0[i_0] > \underline{\int}_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

Beweis. Nach II, § 4 [112]) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und eine Menge E_0 von endlich vielen Trennungspunkten (i.b.a. T) in i_0, für die:

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}] \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Bei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ und $E_0 \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ gibt es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0] \subseteqq \mathfrak{A}[i_0]$, mit nachfolgenden Eigenschaften: 1° aus $x_j < \xi < x_{j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ folgt, bei $i'(\xi) \in \mathfrak{A}'[i_0]$, $i(\xi) \in \mathfrak{A}[i_0]$, daß:

$$i'(\xi) \subseteqq i(\xi) \cdot (x_j, x_{j+1}),$$

während: 2° die $i'(x_j) \in \mathfrak{A}'[i_0]$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ paarweise disjunkt sind, mit

$$i'(x_j) \subseteqq i(x_j) \in \mathfrak{A}[i_0].$$

Ersetzt man außerdem E_0 durch die leere Menge O, so folgt mit der Definition von $F_{[o]}$:

$$F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}] \geqq F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}],$$

also auch:

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}] \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT. \tag{153}$$

Für ein Teilintervall u von i_0 sei $\mathfrak{A}'[u]$ die aus $\mathfrak{A}'[i_0]$ durch Beschränkung auf die Punkte von $\bar{u}$ hervorgehende Riemann-Klasse; sie liefert einen endlichen Wert von $F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}]$. Bei $u \equiv (p, q)$ lassen wir die den Punkten zwischen p und q zugeordneten Umgebungen ungeändert, während $i(p)$ und $i(q)$ $(\in \mathfrak{A}'[u])$ durch fortgesetzte Halbierungen auf beiden Seiten von p bzw. q in gegen p bzw. q konvergierende Umgebungen $i_n(p)$, $i_n(q)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ übergeführt werden sollen; dabei entstehen Riemann-Klassen $\mathfrak{A}'_n[u]$, mit nicht-zunehmenden Zahlenwerten

$$F_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'_n[u], O; T\}];$$

der endliche Grenzwert $(\geqq \overline{\int}_u f\, dT)$ sei

$$\mathfrak{F}_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}].$$

Aus den $\mathfrak{F}_{[o]}$ geht $\Psi_o{}^0$ in folgender Weise hervor:

α) bei $a < c < b$ sei

$$\Psi_o{}^0[\{c\}] = f(c) \cdot T[\{c\}];$$

β) bei $a < c \leqq b$ sei

$$\Psi_o{}^0[(a, c)] = \mathfrak{F}_{[o]}[f;\ \{\mathfrak{A}'[(a, c)], O; T\}];$$

γ) bei $a < c < d \leqq b$ sei

$$\Psi_o{}^0[(c, d)] = \Psi_o{}^0[(a, d)] - \Psi_o{}^0[(a, c)] - \Psi_o{}^0[\{c\}].$$

Bei $x \in i_0, x \in u \equiv (p, q) \subseteqq i(x) \cdot i_0, i(x) \in \mathfrak{A}'[i_0]$ ist

$$f(x) \cdot T[u] \leqq \lim_{n \to \infty} F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'_n[u], O; T\}] \leqq \lim_{n \to \infty} \{F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'_n[(a, q)], O; T\}] - \\ - F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'_n[(a, p)], O; T\}]^{119)}\} - f(p) \cdot T[\{p\}],^{119)}$$

oder

$$f(x) \cdot T[u] \leqq \mathfrak{F}_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[(a, q)], O; T\}] - \mathfrak{F}_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[(a, p)], O; T\}]^{119)} - \\ - f(p) \cdot T[\{p\}],^{119)}$$

also auch

$$f(x) \cdot T[u] \leqq \Psi_o[(a, q)] - \Psi_o[(a, p)]^{119)} - \Psi_o{}^0[\{p\}]^{119)} = (\text{nach } \gamma))\ \Psi_o{}^0[u].$$

Die additive Mengenfunktion $\Psi_o{}^0$ genügt, bei der hier betrachteten beschränkten Funktion f, allen Bedingungen der Definition F^0 (mit $\mathfrak{A}'[i_0]$ als korrespondierende Riemann-Klasse). Mit β) folgt dabei

$$(154) \qquad F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}] \geqq \Psi_o{}^0[i_0].$$

Mit (153) und (154) folgt die erste Hälfte des Hilfssatzes.

Der zweite Teil läßt sich analog ableiten.

Folgerung. Bei f beschränkt in i_0 gilt allgemein für obere und untere allgemeine R- und PS-Integrale:

$$\int_{i_0} f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Hilfssatz B. Aus der Existenz der oberen und unteren PS-Integrale in bezug auf T einer in i_0 endlichwertigen Funktion f folgt, bei $\varepsilon > 0$, die Existenz einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und einer (übrigens willkürlich zu wählenden) Menge E_0 von endlich vielen Trennungspunkten (in bezug auf T), für die

$$(155) \qquad \overline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}].^{120)}$$

Analog gibt es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]$ und eine Menge E'_0 von endlich vielen Trennungspunkten mit

$$(156) \qquad \underline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT - \varepsilon < F_{[u]}[f; \{\mathfrak{A}'[i_0], E'_0; T\}].^{120)}$$

Beweis. Aus der letzten Definition und Definition F^0 folgt bei $\varepsilon > 0$ die Existenz einer in i_0 zu f adjungierten T^0-Majorante $\Psi_o{}^0$ mit

$$(157) \qquad \overline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^0[i_0].$$

Für die zu $\Psi_o{}^0$ gehörende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und die Menge E_0 (wie im Hilfssatz B angegeben) ist dann wegen der Bedingungen 1 und 3 und der Additivitätsannahme in Definition F^0:

$$(158) \qquad \Psi_o{}^0[i_0] \geqq F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}].$$

Aus (157) und (158) folgt (155).

Analog läßt sich (156) beweisen.

---

119) Diese Glieder fehlen bei $p = a$.

120) Siehe die Definition in II, § 4 (loc. cit. 112), S. 14).

Folgerung. Hat eine in i_0 endlichwertige Funktion f obere und untere PS-Integrale in bezug auf T über i_0, so ist

$$\overline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0}(PS)\, f\, dT;$$

dabei sind $\overline{\int}_{i_0} f\, dT$ und $\underline{\int}_{i_0} f\, dT$ obere und untere allgemeine Riemann-Integrale. [120])

Bei endlichwertigen Funktionen folgt somit in einfacher Weise aus PS-Integration auch allgemeine R-Integration in bezug auf T.

Aus den Folgerungen der Hilfssätze A und B geht unmittelbar hervor:

Theorem 58. *Bei einer in i_0 beschränkten Funktion f existieren die oberen und die unteren PS- und allgemeinen R-Integrale in bezug auf T über i_0 mit*

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)\, f\, dT = \overline{\int}_{i_0} f\, dT \quad \textit{und} \quad \underline{\int}_{i_0} (PS)\, f\, dT = \underline{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Insbes. ist für jede Teilmenge A von i_0:

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)\, c_A\, dT = \mu_{a,T}(A) \geqq \mu_{i,T}(A) = \underline{\int}_{i_0} (PS)\, c_A\, dT.$$

Notwendig und hinreichend zur Existenz des allgemeinen T-Maßes $\mu_T(A)$ einer Teilmenge A von i_0 ist die PS-Integrierbarkeit von c_A über i_0, also ebenso wohl die Existenz des LS-Maßes $m_T(A)$ [121]); dabei ist dann

$$m_T(A) = \int_{i_0} (PS)\, c_A\, dT = \mu_T(A).$$

Die Klasse der allgemein T-meßbaren Mengen fällt mit der Klasse der Mengen mit LS-Maß m_T zusammen.

Mit II, § 4[bis] folgt *daß dadurch auch die Klassen der allgemein Φ-meßbaren Mengen und der Mengen mit LS-Maß m_Φ zusammenfallen, wobei die Maßzahlen wieder den gleichen Wert haben.*

§ 48. Hilfssatz A*. Bei f endlichwertig in i_0 und allgemein R-integrierbar über i_0 in bezug auf T folgt bei $\varepsilon > 0$ die Existenz einer zu f adjungierten T^0-Majorante $\Psi_o{}^0$ (im Sinne der Def. F^0) und einer zu f adjungierten T^0-Minorante $\Psi_u{}^0$ (im Sinne der Def. G^0), mit

$$\int_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^0[i_0] \geqq \Psi_u{}^0[i_0] > \int_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

Beweis. Nach I, § 1 (Def. C) [122]) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und eine Menge E_0 von endlich vielen Trennungspunkten (i.b.a.T) in i_0, für die:

$$\int_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \overline{F}[f;\, \{\mathfrak{A}[i_0],\, E_0;\, T\}] > \int_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

---

[121]) Denn für beschränkte Funktionen sind PS-Integration in bezug auf T und spezielle DS-Integration in bezug auf T, also auch PS-Integration i.b.a.T und LS-Integration in bezug auf m_T aequivalent, wie insbes. aus dem Satz in Teil III, § 14 hervorgeht.

[122]) Siehe loc. cit. 112, S. 4 ($\overline{F}$ ist abgeschlossen).

In analoger Weise wie im Beweise von Hilfssatz A erhält man durch Einschränkung der durch $\mathfrak{A}[i_0]$ den Punkten von $\bar{i}_0$ zugewiesenen Umgebungen eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]$, für die:

$$(159) \qquad \int_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \bar{F}[f;\, \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}] > \int_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

Für ein Teilintervall u von i_0 sei $\mathfrak{A}'[u]$ in derselben Weise aus $\mathfrak{A}'[i_0]$ hergeleitet wie im Beweise von Hilfssatz A, und ebenso wie dort aus $F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}]$ der endliche Grenzwert

$$\mathfrak{F}_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}].$$

$\Psi_o{}^0$ sei in derselben Weise aus $\mathfrak{F}_{[o]}$ und f abgeleitet wie im Beweise von Hilfssatz A. Wie dort folgt daß $\Psi_o{}^0$ beschränkt additiv für die zu K gehörenden Teilmengen von i_0 ist, daß:

$$\int_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^0[i_0],$$

und daß $\Psi_o{}^0$ die Annahmen 1 und 3 der Definition F^0 erfüllt.

Wir haben somit nur noch Annahme 2 für $\Psi_o{}^0$ zu beweisen. Mit $a < p < b$ und $u \equiv (a, p)$, $v \equiv (p, b)$ folgt aus der Existenz von $\int_{i_0} f\, dT$ daß auch $\int_{\{p\}} f\, dT$ und $\int_v f\, dT$ existieren. Bei ε gibt es dadurch eine $\{\mathfrak{A}'[v], O; T\}$-Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$ von v [123]) mit zugehörigem Werte $\sum_{v;\,\mathfrak{Z}_0}$ der korrespondierenden Riemann-Summe von f in bezug auf T über v, für welchen

$$(160) \qquad \left|\sum\nolimits_{v;\,\mathfrak{Z}_0} - \int_v f\, dT\right| < \varepsilon$$

ist. Dabei sei das erste (keinen Beitrag in $\sum_{v;\,\mathfrak{Z}_0}$ liefernde) Intervall von $\mathfrak{Z}_0$ (p, p_1); es lassen sich p_1 und δ (>0) so wählen daß für jedes p enthaltende Intervall $(q, p_1) \subset i(p) \in \mathfrak{A}'[i_0]$ und $\subset (p-\delta, p_1)$ gilt:

$$(161) \qquad \left|\int_{\{p\}} f\, dT - f(p) \cdot T[(q, p_1)]\right| < \varepsilon.$$

Aus jeder $\{\mathfrak{A}'[u], O; T\}$-Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von u, mit einem Punkte q wie oben als letzter Teilungspunkt, und der Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$ von v, mit p_1 als erster Teilungspunkt, entsteht eine $\{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}$-Zerlegung mit q und p_1 als aufeinander folgende Teilungspunkte. $\sum_{u;\,\mathfrak{Z}}$ sei der Wert der zu $\mathfrak{Z}$ gehörenden Riemann-Summe über u. Wegen (159) ist nun

$$(162) \qquad \int_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \sum\nolimits_{u;\,\mathfrak{Z}} + f(p) \cdot T[(q, p_1)] + \sum\nolimits_{v;\,\mathfrak{Z}_0} > \int_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

Aus (160), (161), (162) und der Additivität des Integrals folgt:

$$\int_u f\, dT + 3\varepsilon > \sum\nolimits_{u;\,\mathfrak{Z}} > \int_u f\, dT - 3\varepsilon,$$

was weiter liefert:

$$\int_u f\, dT + 3\varepsilon \geqq \mathfrak{F}_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}] \geqq \int_u f\, dT - 3\varepsilon,$$

oder, mit β),

$$\left|\int_u f\, dT - \Psi_o{}^0[u]\right| \leqq 3\varepsilon.$$

---

[123]) $\mathfrak{A}'[v]$ geht aus $\mathfrak{A}'[i_0]$ in derselben Weise hervor wie $\mathfrak{A}'[u]$.

Mit γ) folgt dadurch für jedes Teilintervall u von i_0:

$$\left|\int_u f\, dT - \Psi_o{}^0[u]\right| \leqq 6\varepsilon.$$

Da die T-Integrale (nach I, § 2, Th. 5 [124])) in $\bar{i}_0$ stetig sind, folgt dasselbe für $\Psi_o{}^0$; diese Mengenfunktion genügt somit 2. von Def. F^0.

Der zweite Teil von Hilfssatz A* läßt sich analog ableiten.

Aus Hilfssatz A*, der Folgerung zu Hilfssatz B und der Aequivalenz von PS- und spezieller DS-Integration [125]) folgt unmittelbar das

Theorem 59. *Aus der Existenz eines der nachfolgenden Integrale einer in i_0 endlichwertigen Funktion f folgt die Existenz der übrigen, und ihre Gleichheit:*

$$\int_{i_0} (\text{allg. } R)\, f\, dT,\ \int_{i_0} (PS)\, f\, dT,\ \int_{i_0} (DS)\, f\, dT.$$

Theorem 59$^{\text{bis}}$. *Hat die in i_0 definierte Funktion f nur unendliche Werte in den Punkten einer Teilmenge E mit $m_T(E) = 0$ [oder, was dasselbe ist, mit $\mu_T(E) = 0$], so folgt aus der Existenz eines der nachfolgenden Integrale die Existenz der übrigen, und ihre Gleichheit:*

$$\int_{i_0} (\text{allg. } R)\, f\, dT\ [d\Phi],\ \int_{i_0} (PS)\, f\, dT\ [d\Phi],\ \int_{i_0} (DS)\, f\, dT\ [d\Phi].$$

Dabei soll $\int_{i_0}$ (allg. R) $f\, d\Phi$ gemäß Def. D^{ter} [126]) genommen werden.

Dies folgt mit Theorem 59 und zugehörigen Integraldefinitionen [für die T-Integration sind dies Def. C^{bis} (in II, § 7), Def. H (in III, § 13) [117]), Def. J_k ($k = 1$ oder 2) (in III, § 14); für die Φ-Integrale sind es Def. D^{ter} (in III, § 16 [126])), Def. H^* (in III, § 13$^{\text{bis}}$), Def. J_k ($k = 1$ oder 2) (in III, § 14)].

---

[124]) Siehe loc. cit. 112), S. 8.

[125]) Siehe loc. cit. 112), S. 169 (Satz).

[126]) Siehe loc. cit. 112), S. 172, 173.